t

باسمه تعالی

دانشگاه تهران - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ساختمان‌داده‌ها و الگوریتم‌ها

تمرین پنجم - گراف

علی دهقان‌زاده، عرفان میرشمس

تاریخ تحویل: ۱۴۰۴/۱۰/۰۴

۱. شبکهٔ ارتباطی از هم گسسته — ۱۵ نمره

فرض کنید شما مسئول طراحی شبکه‌ی ارتباطی بین n مرکز عملیاتی هستید. این مراکز از قبل با m لینک مستقیم به هم متصل شده‌اند، اما شبکه به‌طور کامل یکپارچه نیست و بین همه‌ی مراکز امکان ارتباط وجود ندارد. هر لینک مستقیم تنها می‌تواند دو مرکز متفاوت را به هم متصل کند و هزینه‌ی ایجاد هر لینک جدید یکسان است.

هدف شما این است که شبکه را به‌گونه‌ای توسعه دهید که بین هر دو مرکز، حداقل یک مسیر ارتباطی وجود داشته باشد. به خاطر هزینهٔ سرسام آور اتصال دو مرکز به همدیگر، این کار را با حداقل تعداد لینک جدید انجام دهید. همچنین مشخص کنید دقیقاً کدام لینک‌ها باید اضافه شوند.

ورودی شامل تعداد مراکز، تعداد لینک‌های موجود، و فهرست اتصال‌های فعلی است. الگوریتمی ارائه دهید که هم بتواند تعداد لینک های جدید مورد نیاز را اعلام کند و هم مشخص کند کدام لینک ها به شبکه اضافه می شوند.

۲. گروه‌بندی بدون تداخل — ۱۵ نمره

فرض کنید تعدادی واحد پردازشی در یک سازمان یا سیستم وجود دارد. بین برخی از این واحدها، تداخل مستقیم وجود دارد؛ به این معنا که این دو واحد نمی‌توانند در یک گروه کاری، یک محیط اجرایی، یا یک دامنه‌ی عملیاتی مشترک قرار بگیرند. این تداخل‌ها به‌صورت زوج‌های دوتایی داده شده‌اند و متقارن هستند.

هدف شما این است که واحدها را به دو گروه مجزا تقسیم کنید به‌طوری که: هیچ دو واحدی که بین آن‌ها تداخل وجود دارد، در یک گروه قرار نگیرند؛ اندازه‌ی دو گروه محدودیتی ندارد و می‌تواند دلخواه باشد.

ورودی شامل تعداد واحدهای پردازشی، تعداد تداخلات بین واحدهای پردازشی و لیست دوتایی‌های تداخل‌دار است. الگوریتمی ارائه دهید که به کمک این اطلاعات، بتوان واحدهای پردازشی را به دو گروه مجزا تقسیم کرد.

۳. طولانی‌ترین مسیر صعودی — ۱۵ نمره

یک تصویر یا نقشه‌ی دوبعدی به‌صورت یک ماتریس عددی مدل شده است که مقدار هر خانه نشان‌دهنده‌ی شدت، ارتفاع، یا سطح ویژگی خاصی در آن نقطه است.

از هر خانه تنها می‌توان به چهار همسایه‌ی مستقیم آن (بالا، پایین، چپ، راست) منتقل شد و نمی‌توان قطری حرکت کرد. وظیفهٔ شما این است که با داشتن این نقشهٔ دو بعدی، طولانی‌ترین مسیر اکیداً صعودی در این نقشه را بیابید.

۴. گسترش شبکه‌ی دوگانه ۱۵ نمره

فرض کنید یک شبکه‌ی عملیاتی شامل سرور یا ایستگاه کاری دارید که در ابتدا به شکل یک درخت ساده به هم متصل شده‌اند. شما می‌خواهید این شبکه را گسترش دهید به گونه‌ای که شبکه همچنان دوگانه (bipartite) باقی بماند؛ یعنی سرورها را بتوان به دو گروه تقسیم کرد و هیچ لینکی بین دو سرور یک گروه وجود نداشته باشد.

همچنین شبکه باید ساده باشد؛ یعنی هیچ لینک تکراری یا حلقه خود-ارجاع نداشته باشد و حداکثر لینک‌های جدید بین دو گروه اضافه شود تا ارتباطات بین گروه‌ها به حداکثر برسد. الگوریتمی ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

۵. ربات پارکورکار ۱۵ نمره

فرض کنید یک ربات روی یک درخت با n گره زندگی می‌کند. ربات از گره‌ی ۱ شروع می‌کند و شما در گره‌ی t هستید. شما می‌خواهید یک دستور چندگانه به ربات بدهید که به زبان «پارکور» نوشته شده باشد تا به شما برسد.

زبان پارکور شامل دو نوع دستور است:

- **دستور ۱**: ربات باید به هر گره‌ی مجاور حرکت کند. اگر گزینه‌های متعددی وجود داشته باشد، یکی از آن‌ها را به صورت دلخواه انتخاب می‌کند. اگر گره‌ای مجاور نداشته باشد، حرکت نمی‌کند.
- **دستور ۲ u**: گره‌ی u و تمام یال‌های متصل به آن را تخریب می‌کند. اگر ربات در حال حاضر روی گره‌ی u باشد، منفجر می‌شود (که نباید این اتفاق بیفتد). اگر گره‌ی u قبلاً تخریب شده باشد، هیچ اتفاقی نمی‌افتد.

همچنین، نمی‌توان دو دستور نوع دوم را پشت سر هم قرار داد.

متأسفانه، زبان پارکور مبهم است زیرا ربات ممکن است در هر دستور نوع اول چند گزینه داشته باشد. بنابراین، شما باید یک دنباله از دستورات با طول حداکثر مشخص بسازید که اگر ربات آن‌ها را اجرا کند، بدون توجه به انتخاب‌های دلخواهش، در نهایت به گره‌ی t برسد.

توجه کنید که ما دستورات را مرحله‌ای نمی‌فرستیم و در همان مرحلهٔ اول، یک دستور کامل می‌فرستیم که ربات اجرا کند.

۶. عبور ایمن از میان دایره‌ها ۱۵ نمره

فرض کنید یک صفحه‌ی دوبعدی شامل یک مستطیل عملیاتی به عرض W و ارتفاع H دارید. در این صفحه، تعدادی محدوده ممنوعه به شکل دایره وجود دارد که هر دایره با مختصات مرکز (x, y) و شعاع r مشخص می‌شود و نشان‌دهنده‌ی منطقه‌ای است که ورود به آن مجاز نیست.

شما باید بررسی کنید که آیا مسیر ایمن و پیوسته‌ای وجود دارد که شرایط زیر را داشته باشد یا خیر:

- مسیر از گوشه پایین-چپ مستطیل $(۰, ۰)$ شروع شود و به گوشه بالا-راست مستطیل (W, H) برسد.
- مسیر کاملاً درون مستطیل باشد و هیچ قسمتی از آن روی دایره‌ها یا داخل آن‌ها قرار نگیرد.

اگر چنین مسیر ایمنی وجود داشته باشد، خروجی **true** و در غیر این صورت **false** است.